Polarizacija ravnog harmonijskog elektromagnetnog talasa

Na osnovu analize Maksvelovih jednačina, u aproksimaciji ravnog talasa, sledi da će elektromagnetni talas biti u stvari linearna kombinacija dva ravna talasa, sa vektorima električnog i magntenog polja u međusobno normalnim pravcima. Njihove komponente (Ey, Hz) i (Ez, Hy) zadovoljavaju jednačine:

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial x} = -\mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathrm{H}_z}{\partial x} = -\varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}_y}{\partial t} \end{cases} \quad ....(1), \qquad \begin{cases} \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial x} = \mu_r \mu_0 \frac{\partial \mathrm{H}_y}{\partial t} \\ \frac{\partial \mathrm{H}_y}{\partial x} = \varepsilon_r \varepsilon_0 \frac{\partial \mathrm{E}_z}{\partial t} \end{cases} \quad (2).$$

Pošto se kao svetlosni vektor tradicionalno označava vektor električnog polja, u nastavku će se pravcem polarizacije talasa smatrati pravac vektora električnog polja $\vec{E}$. Može se pokazati da je linearna kombinacija dva talasa koji su rešenja talasne jednačine, takođe predstavlja njeno rešenja. To jest, elektromagnetni talas čiji je vektor električnog polja dat jednačinom:

$$\vec{E}(x,t) = E_y(x,t)\overrightarrow{e_y} + E_z(x,t)\overrightarrow{e_z}, \qquad (3)$$

gde su E_y i E_z harmonijske funkcije vremena oblika $E_y(x,t) = E_0 cos(\omega t - kx + \varphi_1)$ i $E_z(x,t) = E_0 cos(\omega t - kx + \varphi_2)$ je takođe rešenje talasne jednačine. Talasi u sumi (3) su linearno polarizovani talasi, jer vrhovi vektora njihovih električnih polja osciluju po pravoj liniji normalnoj na pravac kretanja talasa.

Definišimo polarizacionu ravan kao ravan određenu vektorom ukupnog električnog polja $\vec{E}$ i vektorom $\overrightarrow{e_x}$, jediničnim vektorom pravca u kome se prostire talas. Da bi odredili trajektoriju po kojoj se kreće vrh vektora $\vec{E}$ u polarizacionoj ravni, pođimo od jednačina:

$$E_y(x,t) = E_1 cos(\omega t - kx + \varphi_1)$$

$$E_z(x,t) = E_2 cos(\omega t - kx + \varphi_2), \qquad (4)$$

podelimo prvu sa E_1 , drugu sa E_2 i uvedimo smenu $\tau = \omega t - kx$, tako da dobijamo:

$$\frac{E_y(x,t)}{E_1} = cos(\tau + \varphi_1)$$

$$\frac{E_z(x,t)}{E_2} = cos(\tau + \varphi_2), \qquad (5)$$

odakle posle primene trigonometrijskih adicionih formula dobijamo sistem:

$$\frac{E_y}{E_1} = \cos\tau \cos\varphi_1 - \sin\tau \sin\varphi_1$$

$$\frac{E_z}{E_2} = \cos\tau \cos\varphi_2 - \sin\tau \sin\varphi_2 . \qquad (6)$$

Množenjem prve jednačine u sistemu (6) sa $\sin\varphi_2$ a druge sa $\sin\varphi_1$ i oduzimanjem druge od prve, koristeći trigonometrijsku formulu za $\sin(\varphi_2 - \varphi_1)$, dobijamo:

$$\frac{E_y}{E_1}\sin\varphi_2 - \frac{E_z}{E_2}\sin\varphi_1 = \cos\tau\sin(\varphi_2 - \varphi_1), \tag{7}$$

Zatim prvu jednačinu u sistemu (6) množimo sa $\cos\varphi_2$ a drugu sa $\cos\varphi_1$, oduzimamo drugu od prve i dobijamo:

$$\frac{E_y}{E_1}\cos\varphi_2 - \frac{E_z}{E_2}\cos\varphi_1 = \sin\tau\sin(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{8}$$

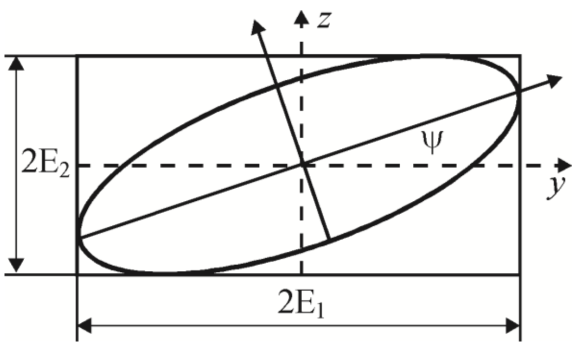
Kvadriranjem jednačina (7) i (8) i njihovim sabiranjem, pri čemu se koriste trigonometrijski identiteti: $\sin^2\varphi + \cos^2\varphi = 1$, $\cos\varphi_1\cos\varphi_2 + \sin\varphi_1\sin\varphi_2 = \cos(\varphi_2 - \varphi_1)$ dobijamo konačno jednačinu trajektorije koju opisuje vrh vektora rezultujućeg električnog polja:

$$\left(\frac{E_y}{E_1}\right)^2 + \left(\frac{E_z}{E_2}\right)^2 - 2\frac{E_y}{E_1}\frac{E_z}{E_2}\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1). \tag{9}$$

Jednačin (9) predstavlja elipsu, upisanu u pravougaonik stranica E_1 i E_2, koji se nalazu ravni normalnoj na pravac prostiranja elektromagnetnog talasa (slika 1). Elipsa dodiruje stranice kvadrata u tačkama $(\pm E_1, \pm E_2\cos\varphi)$ i $(\pm E_1\cos\varphi, \pm E_2)$. U opštem slučaju, ose elipse nisu u *Ox* i *Oy* pravcu, već zaklapaju neki ugao ψ sa njim. Može se pokazati da za taj ugao važi relacija:

$$tg\ 2\psi = \frac{2E_1E_2}{E_1^2 - E_2^2}\cos\varphi,$$

što u slučaju talasa jednakih amplituda ($E_1 = E_2 = E_0$), bez obzira na vrednost fazne razlike $\varphi_2 - \varphi_1$, daje vrednost $\psi = \pi/4$. Dakle, u opštem slučaju prostiranja monohromatskog svetlosnog talasa, vrh vektora $\vec{E}$ prati elipsu u ravni $x = const$. Odgovarajući talas se zove *eliptički polarizovan talas*.

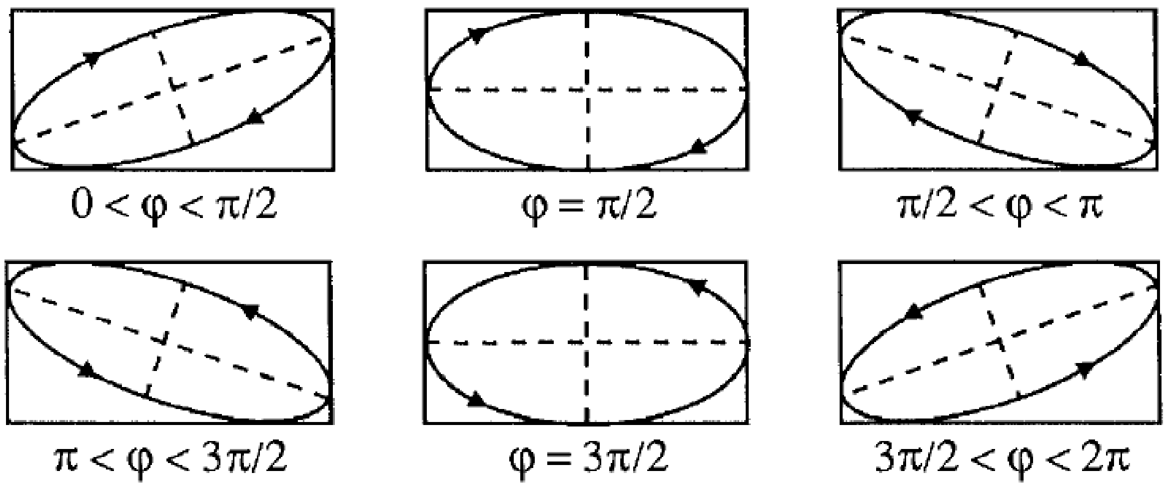


Slika 1. Eliptički polarizovan talas. Trajektorija vrha električnog vektora.

Rotacija vektora $\vec{E}$ može biti u pravcu kretanja kazaljke na časovniku (desno-polarizovani talas) ili u suprotnom pravcu (levo-polarizovani talas). Pokazaćemo da smer rotacije zavisi od fazne razlike $\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Neka je t_0 trenutak vremena u kome je ispunjen uslov: $\omega t_0 - kx + \varphi_1 = 0$. Na osnovu jednačina (4), tada će važiti:

$$E_y(x, t_0) = E_1, \quad \dot{E}_z(x, t_0) = -\omega E_2 \sin\varphi, \tag{10}$$

gde tačka iznad slova označava da se radi o izvodu po vremenu, tj. $\dot{E}_z = \partial E_z / \partial t$. Jednačine (10) pokazuju da u trenutku kada vektor $\vec{E}$ dostiže ekstremnu desnu tačku njegove trajektorije (slika), E_z će biti opadajuća funkcija vremena za $\dot{E}_z < 0$, za $sin\varphi > 0$, to jest za $0 < \varphi < \pi$. Ovaj slučaj odgovara rotaciji u pravcu kazaljke na satu, to jest imamo desno polarizovan eliptički talas (slika 2a). Sa druge strane, za $\dot{E}_z > 0$, za $sin\varphi < 0$, to jest za $\pi < \varphi < 2\pi$, E_z raste i imamo levo polarizovani talas (slika 2b).



a)

b)

Slika 2. Uslovi za dobijanje: a)desno polarizovanog, b)levo polarizovanog talasa.

Linearno i kružno polarizovani talasi

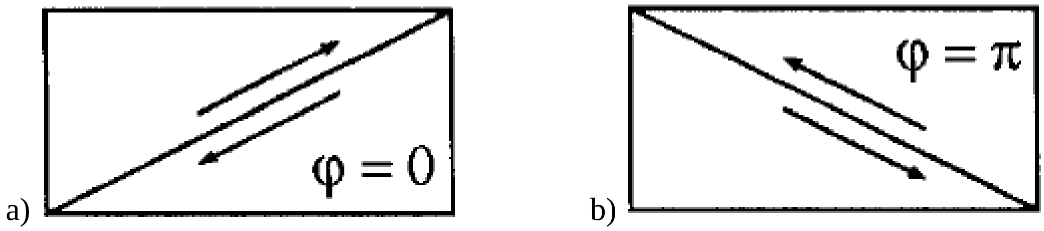
Dva tipa elektromagnetnih talasa su od posebne važnosti, kad polarizaciona elipsa prelazi u pravu liniju i kružnicu. Na osnovu jednačine (9), elipsa će preći u pravu liniju kada važi:

$$\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = m\pi \quad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

tada je:

$$\frac{E_y}{E_z} = (-1)^m \frac{E_1}{E_2}. \tag{11}$$

Elipički polarizovan talas je prešao u *linearno polarizovan*. Prava data jednačina (11) će se nalaziti u I i III kvadrantu koordinatnog sistema za m=0 i pri parnim vrednostima m, a u II i IV kvadrantu pri neparnim vrednostima m (Slika 3).



Slika 3. Linearno polarizovan talas: a) I i III kvadrant, b)II i IV kvadrant.

Drugi važan slučaj je kružno (cirkularno) polarizovan elektromagnetni talas, kada elipsa data jednačinom (9) prelazi u kružnicu. Uslov da pravougaonik u kome je opisana elipsa pređe u kvadrat je jednakost amplituda oba talasa u sistemu (4), tj. $E_1 = E_2 = E_0$. Takođe, jedna od komponenti vektora $\vec{E}$ mora biti jednaka nuli kad druga dostiže maksimalnu vrednost, što dovodi do uslova:

$$\varphi = m\frac{\pi}{2}, \quad (m = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots),$$

na osnovu koga jednačina (9) prelazi u:

$$E_y^2 + E_z^2 = E_0^2. \qquad (12)$$

Električni vektor kružno polarizovanog talasa, opisanog sa (12), će rotirati u pravcu kazaljke časovnika ako je fazna razlika takva da je $\sin\varphi > 0$ (slika 4a), odnosno suprotno od kazaljke na časovniku kada je $\sin\varphi < 0$ (slika 4b).

Slika 3. Kružno polarizovan talas: a) desna polarizacija , b) leva polarizacija .